SOLUTII SI BAREM
CLASA A X - A
ETAPA LOCALĂ 15.02.2015

Problema 1:

a) $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$ **(2p)**

b) $Folosind\ punctul\ a)\ avem\ log_a \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} \geq log_a \frac{b+c+d}{3} \geq log_a \sqrt[3]{bcd} = \frac{1}{3}(\ log_a b + log_a c + log_a d)$
(3p)

Corespunzător se scriu celelalte trei inegalități și se însumează; notând cu A membrul stâng al inegalității de demonstrat obținem:

$A \geq \frac{1}{3}\sum(\ log_a b + log_b a) \geq \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 4$
(2p)

Problema 2:

$$\boldsymbol{f(x_1) - f(x_2) = \frac{ax_1^3+1}{x_1} - \frac{ax_2^3+1}{x_2} = ax_1^2 - ax_2^2 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}$$
$$\boldsymbol{= a(x_1-x_2)(x_1+x_2) - \frac{x_1-x_2}{x_1x_2} =}$$
$$\boldsymbol{\frac{[a(x_1+x_2)x_1x_2 - 1](x_1x_2)}{x_1x_2}}$$

(1p)

Dacă a =0 și $f(x_1) = f(x_2)\ rezultă\ x_1 = x_2$ deci funcția f este injectivă
(1p)

Dacă $a \neq 0, există\ a, x_1, x_2, x_1 \neq x_2\ astfel\ încât\ a(x_1+x_2)x_1x_2 - 1 = 0$ adică $f(x_1) = f(x_2)$ și f nu ar fi injectivă. Justificăm afirmația:

Fie s = $x_1 + x_2$ și p=x_1x_2 obținem asp-1=0 sau sp = $\frac{1}{a}$.

Ecuația de gradul al doliea cu rădăcinile x_1 $și$ x_2 este $x^2 - sx + p = 0$.

Alegem $s = \frac{2}{\sqrt[3]{a}}$ și $p = \frac{2}{2\sqrt[3]{a^2}}$ Atunci discriminantul ecuației

$\Delta = s^2 - 4p = \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} > 0$, deci rădăcinile x_1 $și$ x_2 sunt reale și $x_1 \neq x_2$**(3 p)**

Concluzionăm că $f(x) = \frac{1}{x}, f: \mathbb{R}^* \to M$

Ecuația $f(x) = y\ are\ soluția\ x = \frac{1}{y}, y \in \mathbb{R}^*$ deci funcția este surjectivă, astfel că este bijectivă.

(1p)

Deoarece $y \in \mathbb{R}^*$ rezultă M=$\mathbb{R}^*$

(1p)

Problema 3:

Fie $z_k = a_k + i\ b_k, k = \overline{1,2015}, a_k, b_k \in \mathbb{R}, i^2 = -1$

$\sum_{k=1}^{2015} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^{2015} \left({a_k}^2 + {b_k}^2\right); Re(z_k z_{k+1}) = a_k a_{k+1} - b_k b_{k+1}, k = \overline{1,2015}, b_{2016} = b_{1,} a_{2016} = a_1$

(1p)

Egalitatea din enunț devine: ${a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_{2015}}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_{2015}}^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{2015} a_1 - b_1 b_2 - b_2 b_3 - \cdots - b_{2015} b_1$ sau

(1p)

$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_{2015} - a_1)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (b_2 + b_3)^2 + \ldots + (b_{2015} + b_1)^2 = 0$

(2p)

Și de aici : $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2015} = a \in \mathbb{R}$ și $b_1 = b_2 = \cdots = b_{2015} = 0$

(2p)

Rezultă $z_1 + \ldots + z_{2015} = 2015a \in \mathbb{R}\ z_1 \ldots z_{2015} = a^{2015} \in \mathbb{R}$

(**1p)**

Problema 4:

În b) înlocuim x și y cu 1: $f(1)+f(1)\geq f(1)\Rightarrow f(1)\geq 0$

(1p)

În a) înlocuim x cu $\frac{1}{x}$: $f\left(\frac{1}{x}\right)\leq g\left(\frac{1}{x}\right)$. Din proprietatea funcției date g deducem

$g\left(\frac{1}{x}\right)\leq -g(x)$ *și rezultă* $f\left(\frac{1}{x}\right)\leq -g(x)$ *adică* $-f\left(\frac{1}{x}\right)\geq g(x)$ (1)

(2p)

Din condiția b) găsim $f(1)\leq f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ *prin înlocuirea lui* y *cu* $\frac{1}{x}$. Cum $f(1)\geq 0$

Rezultă $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\geq 0$ (2)

(2p)

Adunăm inegalitățile (1) și (2) și rezultă $f(x)\geq g(x)$.

(1p)

Având în vedere a), obținem $f(x)=g(x)$ este singura funcțe care satisfice condițiile date.